OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a V – a

1. FELADAT Határozzátok meg az $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 + 900$ szám 440-nel való osztási hányadosát és maradékát.

2. FELADAT Igazoljátok, hogy $\left(2016^{n+1} + 2017^{n+1} + 2016^{n} - 2017^{n}\right) \vdots 2016 \cdot 2017,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. FELADAT Határozzátok meg az $\overline{abc}$ és $\overline{xy}$ természetes számokat, melyekre

$$\overline{abc} + \overline{bc} + c = 2^{\overline{xy}} + 57.$$

4. FELADAT Egy asztalon 9 kártya van. Minden kártyára az

$$1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14$$

számok egyike van felírva úgy, hogy nem létezik két kártya ugyanazzal a számmmal. Gigel és Costel a 9 kártyából fejenként 4 kártyát vesz el. Határozzátok meg az asztalon maradt kártyára írt számot tudva, hogy a Gigel kártyáira írt számok összege ötször nagyobb mint a Costel kártyáira írt számok összege.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a VI – a

1. FELADAT a) Írjátok irreducibilis tört alakjában az $\frac{1710171}{1320132}$ törtet.

b) Legyen $\frac{p}{q}$ irreducibilis tört, ahol $p,q \in \mathbb{N}^*$, $p<q$. Igazoljátok, hogy az $1-\frac{p}{q}$ tört szintén irreducibilis.

2. FELADAT Határozzátok meg azokat az $\overline{abc}$ természetes számokat amelyekre $[a,b,c]^3 = \overline{abc}$. $[a,b,c]$ –vel jelöltük az a,b,c számok legkisebb közös többszörösét.

3. FELADAT András egy egyenest rajzolt, melyen kettőnél több pontot pirossal színezett ki. Majd az eddig kiszínezett bármely két egymásutáni pont között kiszínez kékkel egy-egy pontot. Továbbá, az eddig kiszínezett bármely két egymásutáni pont között kiszínez sárgával egy-egy pontot. András az előbbi eljárást folytatja zöld illetve fekete színnel.

a) Ha András 7 kék pontot színezett ki, akkor hány pontot színezett ki összesen?

b) András pirossal színezett ki tetszőleges számú pontot. Mutassátok ki, hogy csak egy szín létezik mellyel András páratlan számú pontot színezett ki.

4. FELADAT Legyen A,B,C,D,E és F hat kollineáris pont (ebben a sorrendben) és egy O pont, $O \notin AB$. Igazoljátok, hogy

a) ha $2AC = AB + AD$ és $2CF = AF + EF$, akkor $(AB) \equiv (DE)$;

b) ha $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF$, valamint $[OC$ és $[OD$ a $\sphericalangle BOD$ illetve a $\sphericalangle COE$ szögek szögfelezői, akkor $5m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle AOF)$

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a VII – a

1. FELADAT a) Oldjátok meg a következő egyenletet $\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+\ldots+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=96;$

b) Bizonyítsátok be, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}\leq\frac{n}{2}, n\in\mathbb{N}^*.$

2. FELADAT a) Adottak a következő számok $x=2+4+6+\ldots+4034$ és

$$y=2017\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018}\right).$$

Mutasátok ki, hogy az $a=x-2018\cdot y$ szám teljes négyzet;

b) Legyen $a,b\in\mathbb{R}$ úgy, hogy $a+b=3\sqrt{2}-10.$ Bizonyítsátok be, hogy $\left|a+\sqrt{2}\right|+\left|b+4\right|\geq 6-4\sqrt{2}.$

3. FELADAT Legyen $ABCD$ egy trapéz melyben $AB\parallel CD$, E az (AB) középpontja, F a (CD) középpontja és $AF\cap DE=\{P\}$, $BF\cap CE=\{Q\}$. Mutasátok ki, hogy:

a) $PQ\parallel AB$

b) $PQ=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}$

4. FELADAT Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, $M\in(AB)$, $AM=2MB$, $DM\cap BC=\{N\}$. Tudva, hogy az MNB háromszög területe $24\ cm^2$, számítsátok ki az $ANCD$ négyszög területét.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a VIII – a

1. FELADAT Mutassátok ki, hogy:

a) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, bármely $n,\ n \geq 2$ természetes szám esetén;

b) $\frac{3}{28} + \frac{3}{63} + \frac{3}{112} + \ldots + \frac{3}{7 \cdot 2017^2} < \frac{1}{2}$.

2. FELADAT Legyen $ABCD$ és $CDEF$ két, különböző síkban lévő paralelogramma úgy, hogy $DE = DA,\ AC = DF$ és $AE \perp AB$. Tudva, hogy $EG \perp CD$, $G \in CD$ mutassátok ki, hogy:

$a)$ $AB \perp (AGE)$;

$b)$ $G = D$.

3. FELADAT A tér minden M pontjához egy m valós számot rendelünk és a tér minden MNP egyenlő oldalú háromszögéhez az $m+n+p$ valós számot rendeljük. Legyen $ABCDEFGH$ egy kocka.

$a)$ Mutassátok ki, hogy BDEG egy szabályos tetraéder;

b) Határozzátok meg $a+c+d+h$ értékét tudva, hogy $m+n+p=\sqrt{6}$, bármely MNP egyenlő oldalú háromszögre a térből.

4. FELADAT Egy téglatestben úgy helyezkedik el n törpe, hogy lemérve a köztük lévő távolságokat, ezek mind különböznek. Egy adott pillanatban minden törpe átugrik a hozzá legközelebb lévő törpe helyére. Határozzátok meg a lehető legtöbb törpe számát aki ugrás után ugyanarra a helyre kerül ha tudjuk, hogy az ugrás pillanatában mindannyian az alaplapon voltak.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a IX – a

1. FELADAT Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1=\frac{3}{2}$, $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$, $\forall n\geq 1$ sorozat.

a) Bizonyítsátok be, hogy: $x_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$, $\forall n\geq 1$.

b) Számítsátok ki az $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_{2017}$. szám egész részét.

2. FELADAT Bizonyítsátok be:

a) ha $a,b>0$, akkor $\frac{1}{\sqrt{ab}}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$;

b) ha $a,b,c>0$ és $a+b+c=1$, akkor $\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ac}{b+ac}}+\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}\leq\frac{3}{2}$.

3. FELADAT Adott az $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $AB>CD$, H_1 és H_2 az ACD és BCD háromszögek ortocentruma. Tudva, hogy ABH_2H_1 téglalap, bizonyítsátok be, hogy $ABCD$ egyenlő szárú trapéz.

4. FELADAT Legyen D egy rögzített pont az ABC háromszög AA' oldalfelezőjén $(A'\in(BC))$. Egy változó egyenes, amely áthalad a D ponton, metszi az (AB) és (AC) szakaszokat az M illetve N pontokban. Ha $MM'\parallel AC$, $NN'\parallel AB$, $M',N'\in(BC)$, mutassátok ki, hogy $\frac{1}{CM'}+\frac{1}{BN'}$ állandó.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a X – a

1. FELADAT Legyen $z \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0$. Számítsátok ki:

a) $|z|$; b) $\left| z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}} \right|$.

2. FELADAT Adott az $f : \{1,2,3,...,2017\} \to \{1,2,3,...,2017\}$ függvény úgy, hogy

$$(f \circ f)(x) + 2017x = 2018 \cdot f(x), \ \forall x \in \{1,2,3,...,2017\}$$

a) Mutassátok ki, hogy az f injektív.

b) Határozzátok meg az f függvényt.

3. FELADAT Adottak a következő függvények: $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ és $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. Határozzátok meg:

a) $\min_{x \in \mathbb{R}} f_1(x) + \min_{x \in \mathbb{R}} f_2(x)$;

b) $\min_{x \in \mathbb{R}} \left(f_1(x) + f_2(x) \right)$.

4. FELADAT Adottak az $a_1, a_2, ., a_{2017}$ különböző természetes számok, amelyek nagyobbak mint 2. Mutassátok ki, hogy: $\log_{2017} 2 + \sum_{i=1}^{2017} \log_{2017} \left(1 - \frac{1}{a_i^2} \right) > 0.$

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a XI – a

1. FELADAT Számítsátok ki:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_1\sqrt{x+1}+a_2\sqrt{x+2}+\ldots+a_{2017}\sqrt{x+2017}\right)$, ahol $a_1,a_2,\ldots,a_{2017}\in\mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

2. FELADAT Legyen $A\in M_2(\mathbb{C})$. Mutassátok ki, hogy ha létezik $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ úgy, hogy $A^n=O_2$ akkor $A^2=O_2$.

3. FELADAT Adott az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ valós számsorozat, amelyre bármely $n\geq 1$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

(i) $a_n\geq 2$;

(ii) $a_{n+1}\leq a_n^2-4a_n+6$;

(iii) $a_{n+1}+a_n^2\leq 4a_n-\dfrac{3}{2}$.

Mutassátok ki, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és számítsátok ki $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

4. FELADAT Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény a következő tulajdonságokkal:

(i) $f(x)+y=f\left(x+f(y)\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

a) Mutassátok ki, hogy az f függvény injektív.

b) Határozzátok meg az összes f függvényt, amely teljesíti az (i) és (ii) feltételeket.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA BIHOR
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 25. 02. 2017

Clasa a XII – a

1. FELADAT Számítsátok ki a következő integrált: $I=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x+1}\right)\cdot\cos(\ln(x+1))\,dx$.

2. FELADAT Bizonyítsátok be, hogy bármely véges csoportban a páratlan rendű elemek száma páratlan.

3. FELADAT Legyen $(K,\cdot)$ egy négy elemes csoport, ahol $K=\{e,a,b,c\}$, e az egységelem és $x^2=e$, bármely $x\in K$.

a) Készítsétek el a $(K,\cdot)$ csoport műveletettábláját;

b) Mutassátok ki, hogy a $(K,\cdot)$ csoport nem izomorf a $(\mathbb{Z}_4,+)$ csoporttal.

c) Mutassátok ki, hogy ha G egy négy elemes véges csoport, akkor G izomorf vagy a K vagy a $\mathbb{Z}_4$ csoporttal.

4. FELADAT Mutassátok ki, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=|x|\cdot f(x)$ függvénynek is van primitív függvénye.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
Toate problemele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.